Álgebra Lineal

1) (Junio-96) Considérese el sistema de ecuaciones lineales (*a*, *b* y *c* son datos; las incógnitas son *x*, *y*, *z*):

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

Si *a*, *b*, y *c* son no nulos, el sistema tiene solución única. Hallar dicha solución.

(Sol: $x = -\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$; $y = -\dfrac{b^2 - c^2 - a^2}{2ac}$; $z = -\dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$ **)**

2) (Junio-96) Sea *A* una matriz cuadrada y sea *A'* la matriz que se obtiene de intercambiar, en *A*, las filas 1ª y 2ª. Es sabido que, entonces, se verifica que det(*A'*)= - det(*A*). Justifíquese este resultado.

(Sol: Cuestión Teórica)

3) (Junio-96) a) Hallar razonadamente los valores del parámetro ***p*** para los que la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la inversa para p=2

(Sol: $a)\ p \neq 0, -1, 1$ **;** $b)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **)**

4) (Sept-96) Obtener las matrices A y B tales que cumplen las siguientes condiciones:

$$3 \cdot A + 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A - 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

(Sol: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **)**

5) (Sept-96) Hallar el valor del determinante de orden 4 cuyo elemento de lugar i, j (fila $i = 1,2,3,4;$ columna $j = 1,2,3,4$ vale $(i + j) \cdot 2^{i+j}$

(Sol: 0)

6) (Junio-97) Obtener el determinante Δ en función de Δ_1, siendo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a'+b' & b'+c' & c'+a' \\ a''+b'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b' & c'' \end{vmatrix}$$

(Sol: $\Delta = 2\cdot\Delta_1$**)**

7) (Junio-97) Sean A y M las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Determinar las relaciones entre a, b, c y de para que se cumpla que $AM = MA$

(Sol: $a = d - c\,;\, b = -c$**)**

8) (Sept-97) Discutir, según los valores de *m*, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x & -2y & +z & = & m \\ 5x & -8y & +9z & = & 3 \\ 2x & +y & -3z & = & -1 \end{cases}$$

(Sol: Si $m = 1/3$ **SCI ; Si** $m \neq 1/3$ **SI)**

9) (Sept-97) Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A\cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de *A; I* es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analizar si AB es una matriz ortogonal.

(Sol: Cuestión Teórica)

10) (Sept-97) Se considera un sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas, que es compatible determinado. Sea S' el sistema que resulta de prescindir en S de la última ecuación. Contesta de forma razonada:

a) ¿Puede ser incompatible el sistema S'?

b) ¿Es compatible el sistema S'?

c) ¿Ha de ser compatible indeterminado el sistema S'?

(Sol: a) No; b) Si ; c) Depende de la ecuación suprimida)

11) (Junio-98) Se considera el sistema de ecuaciones en las incógnitas *x*, *y*, *z*, *t*,

$$\begin{cases} x & +2y & +z & & = & 0 \\ & y & +2z & +t & = & 0 \\ 2x & +2\lambda y & & -t & = & 0 \end{cases}$$

a) Encontrar los valores de λ para que los que el rango de la matriz de coeficientes del sistema sea 2

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$

(Sol: $\lambda = 3/2$ **; b)** $\{(-\lambda, 0, \lambda, -2\lambda \mid \lambda \in \Re\}$**)**

12) (Junio-98) Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, a 980 pta/kg; el B, a 875 pta/kg; y el C, a 950 pta/kg. Desea hacer una mezcla con los tres tipos de café para suministrar un pedido de 1050 kg a un precio de 940 pta/kg. ¿Cuántos kg de cada tipo de café debe mezclar sabiendo que debe poner del tercer tipo el doble de lo que ponga del primero y del segundo juntos?

(Sol: 150 Kg de A ; 200 Kg de B; 700 Kg de C)

13) (Sept-98) Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 100 pta. Se sabe que en total hay 3.600 pta. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1a moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averiguar cuántas monedas había en cada caja.

(Sol: 19 monedas en A; 11 monedas en B; 6 monedas en C)

14) (Sept-98) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) ¿Se cumple la igualdad rango $(A\cdot B)=\text{rango}(A)\cdot\text{rango}(B)$? Justificar la respuesta.

b) Encontrar todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$ tales que $XA=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) ¿Existe alguna matriz *Y*, cuadrada de orden 2, tal que $AY=B^t$? (B^t es la matriz traspuesta de *B*) Justificar la respuesta.

(Sol: a) No ; b) $X=\begin{pmatrix}1 & 2c & c\\ 1 & 2f-1 & f\end{pmatrix}$ **; c) No)**

15) (Junio-99) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real.

a) Encontrar los valores de λ para los que AB es invertible.

b) Determinar los valores de λ para los que BA es invertible.

c) Dados a y b, números reales cualesquiera. ¿puede ser el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ compatible determinado?

(Sol: a) $\lambda=\pm 1$**; b) No existe** λ **; c) No)**

16) (Junio-99) a) Discutir, según los valores de *a*, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0\\ 2x + ay + 4z = 2\\ 2x + ay + 6z = a-2\end{cases}$$

b) Resolverlo para $a=2$

(Sol: a) Si $a=\pm 2$ **SCD ; Si** $a=-2$ **SI ; Si** $a=2$ **SCI ; b)** $\{(\lambda, 3-\lambda, -1 \mid \lambda \in \Re\}$**)**

17) (Sept-99) Hallar, en función de a, el valor del deteminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

(Sol: $|\Delta| = a(a-2)^3$ **)**

18) (Sept-99) Un cajero automático continen 95 billetes de 1.000, 2.000 y 5.000 pesetas y un total de 200.000 pesetas. Si el número de billetes de 1.000 es el doble que el número de billetes de 2.000. Averigua cuantos billetes hay de cada tipo.

(Sol: 50 billetes de 1000; 25 de 2000; 20 de 5000)

19) (Sept-99) a) Estudiar, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+1)x & +2y & +z & = & a+3 \\ ax & +y & & = & a \\ ax & +3y & +z & = & a+2 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema en los casos en que resulte ser compatible determinado.

Sol: a) Si $a \neq -1$ **SCD ; Si** $a=-1$ **SCI ; b)** $x=1,\ y=0;\ z=2$ **)**

20) (Junio-00) Para una matriz cuadrada se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue A y B son matrices cuadradas 2 x 2

a) Comprobar que se verifica $Traza\ (A+B) = Traza\ (A) + Traza\ (B)$

b) Comprobar que $Traza\ (A \cdot B) = Traza\ (B \cdot A)$

c) Utilizando los resultados anteriores demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) Encontrar dos matrices A y B para las que $Traza\ (A \cdot B) \neq Traza\ (A) \cdot Traza\ (B)$

(Sol: Cuestión teórica)

21) (Junio-00) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax & +y & +z & = & (a-1)(a+2) \\ x & +ay & +z & = & (a-1)^2(a+2) \\ x & +y & +az & = & (a-1)^3(a+2) \end{cases}$

a) Comprobar que es compatible para todo valor de a

b) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a=1$ y $a=-2$

c) Resolverlo para $a=-2$

(Sol: b) Si $a=1$**, planos coincidentes ; Si** $a=-2$ **se cortan en una recta ; c) Si** $\lambda=3$ $\{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Re\}$**)**

22) (Sept-00) Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} & +y & +z & = & 1 \\ (\lambda-1)x & +y & +z & = & \lambda \\ x & +(\lambda-1)y & -z & = & 0 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ
b) Resolverlo para $\lambda = 0$
c) Resolverlo para $\lambda = 3$

(Sol: a) Si $\lambda \neq 0$ **y** $\lambda \neq 1$ **SCD; Si** $\lambda = 0$**, SCI ; Si** $\lambda = 1$**, SCI ; b) Si** $\lambda = 0$**,** $\{(1, 1-\lambda, \lambda) |\ \lambda \in \Re\}$**; c) Si** $\lambda = 3$**,** $x = 1, y = 0, z = 1$**)**

23) (Sept-00) a) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema:

$$S_1 \begin{cases} x & +y & +5z & = & 0 \\ 2x & -ky & & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases}$$

b) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad el sistema:

$$\begin{cases} x & +y & +5z & = & 0 \\ 2x & -3y & & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \\ x & +2y & +2\lambda z & = & \lambda \end{cases}$$

(Sol: a) Si $k \neq 3$**, SCD ; Si** $k = 3$**, SCI, solución** $\{(-3\lambda, -2\lambda, \lambda) |\ \lambda \in \Re\}$ **; b) Si** $\lambda \neq 7/2$**, SCD, sol:** $x = \frac{-3\lambda}{2\lambda - 7}$; $y = \frac{-2\lambda}{2\lambda - 7}$; $z = \frac{\lambda}{2\lambda - 7}$ **;**
Si $\lambda = 7/2$**, SI)**

24) (Junio-01) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 2 \\ 2x & -y & +3z & = & 2 \\ 5x & -y & +az & = & 6 \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro a
b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones

(Sol: a) Si $a \neq 8$ **SCD; Si** $a = 8$ **SCI; b)** $\left\{\left(\frac{4-5\lambda}{3}, \frac{2-\lambda}{3}, \lambda\right) |\ \lambda \in \Re\right\}$ **)**

25) (Junio-01) Sea k un número natural y sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^k

b) Hallar la matriz X que verifica $A^k X = BC$

(Sol: a) $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **; b)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **)**

26) (Junio-01) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro real λ

b) Resolverlo para $\lambda = -3$

c) Resolverlo para $\lambda = 1$

(Sol: a) $\lambda \neq 1$ **y** $\lambda \neq -3$ **SI; Si** $\lambda = -3$**, SCD ; Si** $\lambda = 1$**, SCI ; b)** $x = y = z = -1$ **; c)** $\{(1-t-s, s, t) \mid t, s \in \Re\}$**)**

27) (Sept-01) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro real a

b) Resolverlo para $a = 2$

c) Resolverlo para $a = 1$

(Sol: a) Si $a \neq 1$ **y** $a \neq -3$ **SCD; Si** $a = 1$ **SCI; Si** $a = -3$ **SI ; b)** $x = -\frac{13}{5}$; $y = \frac{3}{5}$; $z = \frac{7}{5}$ **c)** $\{(-3\lambda, 1-\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Re\}$**)**

28) (Sept-01) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Comprobar que se verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula

b) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}

c) Calcular A^{100}

(Sol: b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **; c)** $A^{100} = -A$**)**

29) (Junio-02) Calcular la edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la

madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

(Sol: 16,18 y 44 años)

30) (Junio-02) Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Sol : Si $a \neq -4$, rang(A) = 3; Si $a=-4$, rang(A) = 2)

31) (Junio-02) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema para $a=-1$

c) Resolver el sistema para $a=2$

(Sol: a) Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ SCD; Si $a=0$ SI; Si $a=-1$ SCI ; b) $\{(2+\lambda, \lambda, 1) \mid \lambda \in \Re\}$; c) $x=1;\ y=-1;\ z=-\frac{1}{2}$)

32) (Sept-02) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .

b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

c) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

(Sol: a) $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$ SI; Si $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$ SCI ; b) $\{(-2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Re\}$; $\{(-2\lambda, 1+\lambda, 1) \mid \lambda \in \Re\}$

c) Los tres planos se cortan dos a dos)

33) (Sept-02) Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) Expresar A^{-1} en términos de A.

b) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n..

c) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

(Sol: a) $A^{-1}=A$; b) $A^n=\begin{cases} A & \text{si n es impar} \\ I_n & \text{si n es par} \end{cases}$; c) $a=-1$)

34) (Junio-03) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+2)x & +(m-1)y & -z & = & 3 \\ mx & -y & +z & = & 2 \\ x & +my & -z & = & 1 \end{cases}$$

Se pide: a) Resolverlo para $m=1$

b) Discutirlo para los distintos valores de m

(Sol: a) $x=\frac{3}{2}; y=1; z=\frac{3}{2}$ **; b)** $m\neq 0$ **y** $m\neq -1$ **SCD; Si** $m=0$ **ó** $m=-1$ **SI)**

35) (Junio-03) Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

36) (Junio-03) Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión $2\ x\ 2$ (distintas de la matriz nula), tales que $B\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

(Sol: $\lambda = 3$ **;** $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, a,c\in\Re$ **)**

37) (Sept-03) Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x & +4y & +3z & = & 9 \\ mx & +2y & +z & = & 5 \\ x & +y & +z & = & 2 \end{cases}$$

a) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) Resolverlo para $m=1$

(Sol: a) $m\neq -1$ **; b)** $\{(-1-\lambda, 3, \lambda) \mid \lambda\in\Re\}$ **)**

38) (Sept-03) Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) Hallar el precio de cada tipo de billete.

b) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes a extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

(Sol: 300, 400 y 500 euros. Porcentaje 22.5 %)

39) (Sept-03) a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=A\cdot B$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula: $(I-B)^{-1}=-B^{-1}\cdot A$.

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=A\cdot B$

(Sol: $B=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ **)**

40) (Junio-04) Dado el sistema $\begin{cases}(1-a)x & -2y & +4z & = & 0\\ x & -(1+a)y & +z & = & 0\\ -x & +ay & -z & = & 0\end{cases}$

a) Estudiar la compatibilidad, según los valores del parámetro *a*.

b) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

(Sol: a) Si $a\neq -3$**, SCD ; Si** $a=-3$**, SCI ; b)** $\{(-\lambda,0,\lambda) \mid \lambda\in\Re\}$**)**

41) (Junio-04) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Se pide: a) Hallar A^{-1}

b) Hallar la matriz X, tal que $A\cdot X\cdot A^t=B$

(Sol: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ **; b)** $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -3 & -4\\ -2 & -4 & 3\end{pmatrix}$**)**

42) (Junio-04) a) Dado el sistema $\begin{cases}x+2y=1\\ 3x-y=2\end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) Dado el sistema $\begin{cases}2x+2y-z=1\\ x+y+2z=1\end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

(Sol: a) $2x+4y=2$ **; b)** $2x+y+z=1$**)**

43) (Sept-04) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

a) Determinar la matriz inversa de *B*.

b) Determinar una matriz X tal que $A=B\cdot X$

(Sol: a) $B^{-1}=\begin{pmatrix}4/3&-1/3&-1\\-1&1&1\\1/3&-1/3&0\end{pmatrix}$ **; b)** $X=\begin{pmatrix}4/3&1/3&-11/3\\-1&1&5\\1/3&1/3&-2/3\end{pmatrix}$**)**

44) (Sept-04) a) Si *A* es una matriz tal que $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de *A*?

b) Calcular un número *k* tal que: $\left[\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

(Sol: a) $|A|=0$ **; b)** $k=1$**)**

45) (Sept-04) a) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases}\lambda x+3y+z=\lambda\\ x+\lambda y+\lambda z=1\\ x+y-z=1\end{cases}$$

b) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda=2$

(Sol: a) $\lambda\neq 2$ **y** $\lambda\neq -1$ **SCD; Si** $\lambda=2$ **ó** $\lambda=-1$ **SCI ; b)** $\{(1+2t,-3t,t)|\ t\in\Re\}$**)**

46) (Junio-05) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(m-1)x+y+z=3\\ mx+(m-1)y+3z=2m-1\\ x+2y\ (m-2)z=4\end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores *m*.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(Sol: a) Si $m\neq -1,2,4$ **SCD; Si** $m=-1$ **ó** $m=2$ **SI ; Si** $m=4$ **SCI ; b)** $\left\{\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}-t,t\right)\middle|\ t\in\Re\right\}$**)**

47) (Junio-05) a) Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}x+2y+3z=1\\2x+y-z=2\end{cases}$

b) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación:

$5x+y+\alpha z=\beta$ el sistema resultante sea compatible indeterminado.

(Sol: a) $\left\{\left(1+\frac{5\lambda}{3},-\frac{7\lambda}{5},\lambda\right)\middle|\ \lambda\in\Re\right\}$ **; b)** $\alpha=-6$ **,** $\beta=5$ **)**

48) (Junio-05) Hallar una matriz X tal que: $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

(Sol: $X=\begin{pmatrix}9 & 11\\ -6 & -7\end{pmatrix}$ **)**

49) (Sept-05) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2=\alpha A+\beta I$

b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior

c) Hallar todas las matrices X que satisfacen: $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$

(Sol: a) $\alpha=2$ **,** $\beta=-1$ **; b)** $\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **; c)** $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ **)**

50) (Sept-05) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & k & t\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & k & t\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Hallar A^{10}

b) Hallar la matriz inversa de B

c) En el caso particular $k=0$, hallar B^{10}

(Sol: a) $A^{10}=(0)$ **; b)** $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -k & -k^2-t\\ 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **; c)** $B^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 10t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **)**

51) (Junio-06) Dado el sistema homogéneo : $\begin{cases}x+ky-z=0\\ kx-y+z=0\\ (k+1)x+y=0\end{cases}$ averiguar para que valores de k tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$. Resolverlo en tales casos.

(Sol: a) $k=-1, k=2$ **; b) Si** $k=-1$ **,** $\{(\lambda,0,\lambda)|\ \lambda\in\Re\}$ **; Si** $k=2$ **,** $\{-(\lambda,3\lambda,5\lambda)|\ \lambda\in\Re\}$ **)**

52) (Junio-06) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $AP=PA$

(Sol: $P=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ **)**

53) (Junio-06) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar el rango M según los valores del parámetro a

b) Determinar para que valores de a existe la inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$

(Sol: a) $a \neq 0, 1, -1$ **, rango 3,** $a = 0, a = 1, a = -1,$ **rango 2 ; b)** $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ **)**

54) (Sept-06) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $\det(M^2) = (\det(M))^2$? Razonar la respuesta.

c) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que: $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$

(Sol: c) $P = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **)**

55) (Sept-06) a) Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$

b) Hallar las solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

(Sol: a) $\{(8\lambda, 5 - 5\lambda, \lambda) | \ \lambda \in \Re\}$ **b)** $x = 3; y = 0; z = 1$ **)**

56) (Sept-06) a) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) Para cada una de las matrices A obtenidas en el apartado a), calcular

$$M = A + A^2 + \ldots + A^{10}$$

(Sol: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **ó** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **; b)** $M = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **ó** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ **)**

57) (Junio-07) Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m

(Sol : Si $m \neq 0, m \neq 2$ **, rang(A) = 3; Si** $m = 0$ **o** $m = 2$**, rang(A) = 2)**

58) (Junio-07) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

(Sol: $X=\begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$ **)**

59) (Junio-07) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir *a, b, c* para que se verifique $AB=BA$

b) Para $a=b=c=1$, calcular B^{10}

(Sol: a) $a=b=c$ **; b)** $B^{10}=\begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **)**

60) (Sept-07) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+y+z=k \\ (k-1)x-2y-z=k+1 \end{cases}$ se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro *k*

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Sol: a) $k\neq 2$ **y** $k\neq 1/2$ **SI; Si** $k=2$ **, SCI ; Si** $k=1/2$ **, SI ; b)** $\{(7-\lambda)/5,(-3\lambda-4)/5,\lambda)|\ \lambda\in\Re\}$ **)**

61) (Sept-07) Calcular una matriz cuadrada *X* sabiendo que verifica $XA^2+BA=A^2$, siendo

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Sol: $X=-I$ **)**

62) (Sept-07) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$ se pide

a) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax+y+bz=1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

(Sol: a) $a=0, b=-7$ **; b)** $x=29/7, y=-11/7, z=10/7$ **)**

63) (Junio-08) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-ay=2 \\ ax-y=a+1 \end{cases}$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro *a*. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y=2$

(Sol: a) Si $a\neq\pm 1$ **SCD; Si** $a=1$ **SCI; Si** $a=-1$ **SI ;** $x=\frac{a+2}{a+1}$ **,** $y=\frac{-1}{a+1}$ **; b)** $a=-\frac{3}{2}$ **)**

64) (Junio-08) Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ..... & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & ..... & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & ..... & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & ..... & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

(Sol: a) $|A_2| = 10$ **; b)** $|A_3| = 10^2$ **; c)** $|A_5| = 10^4$ **)**

65) (Sept-08) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a

b) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$

(Sol: a) Si $a \neq -1$ **,** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ **,** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **,** $rang(A) = 3$ **, en otro caso** $rang(A) = 2$ **; b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

66) (Sept-08) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{cases}$$

(Sol: $\left\{ \left(-z, 2-\frac{3v}{2}, z, v \right) \middle| \ z, v \in \Re \right\}$ **)**

67) (Sept-08) El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

(Sol: 100 de 50 €, 75 de 20 €, 50 de 10 €)

68) (Junio-09) Dado el sistema $\begin{cases} 4x & +4\lambda y & +2z & = & 2\lambda \\ \lambda x & +y & -\lambda z & = & \lambda \\ 4\lambda x & +4\lambda y & +\lambda z & = & 9 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$

(Sol: a) Si $\lambda \neq 0,1,1/5$ **SCD; Si** $\lambda = 0,1,1/5$ **SI; b)** $x = y = z = -1$**)**

69) (Junio-09) Dado el sistema: $\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema cuando sea posible

(Sol: a) Si $\lambda \neq 2, 6$ **SI; Si** $\lambda = 2, 6$ **SCD; b) Si** $\lambda = 2,\ x = 0; y = -2$ **; Si** $\lambda = 6\ x = -4; y = -14$**)**

70) (Junio-09) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a

b) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

(Sol: a) Si $a \neq 1, -2$ **rang(A)=3; Si** $a = 1,$ **rang(A)=1 ; Si** $a = -2,$ **rang(A)=2 ; b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ **)**

71) (Sept-09) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Determinar los valores del parámetro *m* para los cuales la matriz *M* es invertible.

b) Determinar los valores del parámetro *m* para los cuales la matriz M^{25} es invertible

c) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de *M*.

(Sol: a) $\forall\, m \neq 0, m \neq 1$ **; b)** $\forall\, m \neq 0, m \neq 1$**; c)** $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$**)**

72) (Sept-09) Dado el sistema $\begin{cases} \lambda x & +2y & +z & = & 0 \\ \lambda x & -y & +2z & = & 0 \\ x & -\lambda y & +2z & = & 0 \end{cases}$, se pide:

a) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$x = y = z = 0$

b) Resolver el sistema para $\lambda = 5$

(Sol: a) $\lambda = 1$ **ó** $\lambda = 5$ **; b)** $\left\{ \left(-\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, t \right) \middle|\, t \in R \right\}$ **)**

73) (Sept-09) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B=A+B$

(Sol: $X=\begin{pmatrix}-1/3 & -2/3\\ -5/3 & -4/3\end{pmatrix}$**)**

74) (Junio-10 –Fase General) Dado el sistema homogéneo $\begin{cases} x + ky - z = 0\\ 2x - y + 2z = 0\\ x - 4y + kz = 0\end{cases}$, se pide:

a) Determinar para que valores del parámetro k el sistema tiene infinitas soluciones distintas de $x=y=z=0$

b) Resolverlo para el caso $k=3$

(Sol: a) $k=3,\ k=-5/2$ **; b)** $\left\{\left(\frac{-5\lambda}{7},\frac{4\lambda}{7},\lambda\right)\middle|\ \lambda\in\Re\right\}$

75) (Junio-10 –Fase General) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar dos constantes a, b, tales que $A^2=aA+bI$

b) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5

(Sol: a) $a=-1$**,** $b=3$ **; b)** $A^5=\begin{pmatrix}-2 & 19\\ 15 & -59\end{pmatrix}$ **)**

76) (Junio-10 –Fase General) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + ay - z = a\\ ax + 2z = -2\\ x + z = -2\end{cases}$, se pide

a) Discutirlo según los valores del parámetro a

b) Resolverlo para el caso $a=0$

(Sol: Si $a\neq 0, a\neq 2$ **SCD; Si** $a=0$ **SCI; Si** $a=2$ **SI ; b)** $\{(-1,\lambda,-1)|\ \lambda\in\Re\}$**)**

77) (Junio-10 –Fase Específica) Sabiendo que $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 0 & 3\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=3$, y utilizando las propiedades de los determinantes,

calcular: a) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 6 & 0 & 3\\ \alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}^4$

b) $\begin{vmatrix}10 & 20 & 30\\ 2 & 0 & 1\\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6\\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma\\ \alpha+6 & 3\beta & \gamma+3\end{vmatrix}$

(Sol: a) $2^4\cdot 3^4=1296$ **; b) 30 ; c) -12)**

78) (Junio-10 –Fase Específica) Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x & +my & +3z & = & 3 \\ x & +y & -2z & = & 0 \\ 5x & (m+1)y & +z & = & 9 \end{cases}$, se pide

a) Discutirlo según los valores de m

b) Resolver el sistema para $m=0$

(Sol: a) Si $m \neq -3/2$ **SCD; Si** $m=-3/2$ **SI; b)** $x=3;\ y=-5;\ z=-1$ **)**

79) (Junio-10 –Fase Específica) Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para qué valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

(Sol: Existe A^{-1} **si** $a \neq 0$ **,** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & (1-a^2)/a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$ **)**

80) (Sept-10 –Fase General) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro *m*.

b) En el caso $m=0$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Sol: a) Si $m \neq -1$**,** $m \neq 2$ $rang(A)=3$**; Si** $m=-1$ $rang(A)=2$ **; Si** $m=2$ $rang(A)=1$**; b)** $\{(\lambda,\lambda,-\lambda,0) \mid \lambda \in \Re\}$

81) (Sept-10 –Fase General) Dado el sistema $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

a) Estudiar la compatibilidad del sistema.

b) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta

c) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta

(Sol: a) El sistema es siempre compatible indeterminado; b) $z=0$ **; c)** $3x+y=0$ **)**

82) (Sept-10 –Fase General) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro *a*.

b) ¿Para qué valores de *a* existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a=1$

(Sol: a) Si $a \neq 0$ **,** $a \neq 2$ **,** $rang(A) = 3$ **; Si** $a = 0$ **ó** $a = 2$**,** $rang(A) = 2$**; b) Existe** A^{-1} **si** $a \neq 0$ **,** $a \neq 2$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **)**

83) (Sept-10 –Fase Específica) El sistema $AX = B$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones según sea la matriz *B*.

a) Determinar, si existen, el valor o valores de *a* para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de *B*)

b) Si $a = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o valores de *b* para los que el sistema es incompatible.

c) Si $a = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o valores de *c* para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

(Sol: a) No existen ; b) $b \neq -5/2$ **; c)** $c = 4$ **,** $\{(-\lambda, 4, \lambda, 0) \mid \lambda \in \Re\}$**)**

84) (Sept-10 –Fase Específica) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + kz = k \\ x + ky + z = k^2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro *k*.

b) Resolverlo para $k = 0$

(Sol: a) Si $k \neq 1, k \neq -2$ **SCD; Si** $k = 1$ **SCI; Si** $k = -2$ **SI ; b)** $x = -1/2;\ y = 1/2;\ z = 1/2$ **)**

85) (Junio-11) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de *A* en función de los valores de *a*

b) En el caso $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de *b*, y resolverlo cuando sea posible.

c) En el caso $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Sol: a) Si $a \neq \pm 2,$ **rango 3 ; Si** $a=-2$ **o** $a=2$ **rango 2; b) Si** $b \neq 3$ **SI ; Si** $b=3$ **SCI , sol :** $\{(1-\lambda,1,\lambda) \mid \lambda \in \Re\}$ **;**

c) $x=2$; $y=1$; $z=-3$ **)**

86) (Junio-11) a) Discutir el sistema de ecuaciones $AX=B$ donde:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

b) Resolver el sistema en los casos $m=0$ y $m=1$

(Sol: a) Si $m \neq 0, m \neq 2$ **SCD; Si** $m=0$ **SCI; Si** $m=2$ **SI ; b) Si** $m=0$**,** $\{(-1,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \Re\}$**, Si** $m=1$**,** $x=-3$; $y=1$; $z=1$**)**

87) (Sept-11) Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a

(Sol: rang(A)=3)

88) (Sept-11) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} sen\, x & \cos x & 0 \\ \cos x & -sen\, x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a

a) Calcular el determinante de la matriz *M*.

b) Hallar la matriz M^2

c) Hallar la matriz M^{25}

(Sol: a) -1; b) $M^2=I$ **; c)** $M^{25}=M$ **)**

89) (Sept-11) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x & +4y & & = & 4k \\ -k^3x & +k^2y & +kz & = & 0 \\ x & +ky & & = & k^2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro *k*.

b) Resolver el sistema para $k=1$

c) Resolver el sistema para $k=2$

(Sol: a) Si $k \neq 0, k \neq 2$ **SCD; Si** $k=0$ **o** $k=2$ **SCI; b) Si** $k=1$**,** $x=0$; $y=1$; $z=-1$**; c) Si** $k=2$ $\{(4-2\lambda,\lambda,16-10\lambda) \mid \lambda \in \Re\}$**, ,**

90) (Junio-12) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$, se pide:

a) Hallar el rango de *A* en función de los valores de *k*

b) Para $k=2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX=B$

c) Para $k=1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX=C$

(Sol: a) Si $k \neq 0, k \neq \pm 1$ **rang(A)=3, Si** $k=0,-1,1$ **rang(A)=2; b)** $x=2/3$; $y=0$; $z=8/3$ **; c) No tiene solución)**

91) (Junio-12) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar el rango de la matriz B en función de a

b) Para $a=0$, calcular la matriz X que verifica $AX=B$

(Sol: a) Si $a \neq 1$, **rang(B)=3, Si** $a=1$ **rang(A)=2; b)** $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **)**

92) (Junio-12) Calcular el valor del determinante: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **(Sol:** $(x-1)(y-1)(z-1)$ **)**

93) (Sept-12) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x & +ay & +4z & = & 6 \\ x & +(a+1)y & +z & = & 3 \\ (a-1)x & -ay & -3z & = & -3 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro *a*.

b) Resolver el sistema para $a=-1$

(Sol: a) Si $a \neq -1, a \neq -5/3$ **SCD; Si** $a=-1$ **SCI; Si** $a=-5/3$ **SI ; b)** $\{(3-\lambda, 3+\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Re\}$ **)**

94) (Sept-12) Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in R^3$, vectores columna. Si:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})=-1, \quad \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})=3, \quad \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})=-2$$

Calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) $\det(\vec{a}, 3\vec{d}, \vec{b})$ b) $\det(\vec{a}-\vec{b}, \vec{c}, -\vec{d})$ c) $\det(\vec{d}+3\vec{b}, 2\vec{a}, \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d})$

(Sol: a) 3 ; b) -5 ; c) 4)

95) (Sept-12) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x & & -2z & = & 2 \\ ax & -y & +z & = & -8 \\ 2x & & +az & = & 4 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro *a*.

b) Resolver el sistema para $a=-5$

(Sol: a) Si $a \neq -4$ **SCD; Si** $a=-4$ **SCI; b)** $x=2$; $y=-2$; $z=0$ **)**

96) (Junio-13) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax & +7y & +5z & = & 0 \\ x & +ay & +z & = & 3 \\ & y & +z & = & -2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema en el caso $a = 4$

c) Resolver el sistema en el caso $a = 2$

(Sol: a) Si $a \neq -1, a \neq 2$ **SCD; Si** $a = -1$ **SI; Si** $a = 2$ **SCI ; b) Si** $a = 4: x = 2; y = 1; z = -3$ **; c) Si** $a = 2$ $\{(\lambda+7, -2-\lambda, 1\lambda) | \ \lambda \in \Re\}$**)**

97) (Junio-13) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.

b) Calcular la matriz X para $\lambda = 4$

c) Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ

(Sol: a) $\lambda \neq -1$ **; b)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2/5 & 3/5 & 11/5 \\ 3/5 & 7/5 & 14/5 \end{pmatrix}$ **; c)** $-(\lambda+1)^2$ **)**

98) (Sept-13) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

a) Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) Resolver el sistema homogéneo $AX = O$, en el caso $a = 1$

c) Resolver el sistema homogéneo $AX = O$, en el caso $a = -1$

(Sol: a) $|A| = (1-a)^3(1+a)$ **; Si** $a \neq -1, a \neq 1$ **rang(A)=4 , Si** $a = 1$ **rang(A)=1, Si** $a = -1$ **rang(A)=3 ;**

b) $\{(\lambda, \mu, \theta, -\lambda-\mu-\theta) | \ \lambda, \mu, \theta \in \Re\}$**; c)** $\{(\lambda, 0, 0, \lambda) | \ \lambda \in \Re\}$**)**

99) (Sept-13) Dado el sistema $\begin{cases} 2x & +\lambda y & +\lambda z & = & 1-\lambda \\ x & +y & +(\lambda-1)z & = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x & +y & +z & = & \lambda-1 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$

c) Resolver el sistema en el caso $\lambda = -1$

(Sol: a) Si $\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$ **SCD; Si** $\lambda = -1$ **SCI; Si** $\lambda = 2$ **SI ; b)** $x = 0$; $y = -2$; $z = 2$ **)**

100) (Junio-14) Dadas las matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular α , β , γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$

b) Si $\beta = \gamma = 1$, ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) Si $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$

(Sol: a) Si $\alpha = 1, \beta = 9/2, \gamma = -3$ **; b)** $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ **; c)** $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ **)**

101) (Junio-14) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor o los valores de a para que la matriz A tenga inversa

b) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A , en el caso $a = 2$

(Sol: a) Si $a \neq \pm\sqrt{5/2}$ **; b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$ **)**

102) (Junio-14) Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

(Sol: a) Si x, y, z precios cuaderno, rotulador y bolígrafo , $x = 9z - 6, y = 26 - 24z$ **; b) 30 €)**

103) (Sept-14) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}

b) Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}

c) Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$

(Sol: a) a=0, a=1, a=2 ; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 1/3 & -1/4 \\ -5/24 & -1/6 & -1/8 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ **; c)** $\{(\lambda, -2\lambda, \lambda) | \lambda \in R\}$ **)**

104) (Sept-14) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde B es una matriz cuadrada 2x2, se pide:

a) Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) Calcular B en el caso $a = 1$,

(Sol: a) $a \neq \frac{6}{7}$ **; b** $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$**)**

105) (Sept-14) Estudiar el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a

(Sol: a) Si $a \neq 6$**, rango 4; Si** $a = 6$**, rango 3)**

106) (Junio-15) a) Discutir, según los valores de *m*, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 4x & +3y & +(m-1)z & = & 0 \\ x & -2y & +mz & = & 1 \\ 5x & +my & +z & = & 1 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema anterior para el caso o $m = 1$

(Sol: a) Si $m \neq 1, m \neq 7$ **SCD; Si** $m = 1$ **SCI; Si** $m = 7$ **SI ; b)** $\left\{ \left(\frac{3-3\lambda}{11}, \frac{-4+4\lambda}{11}, \lambda \right) \middle| \ \lambda \in \Re \right\}$**)**

107) (Junio-15) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^{15} y A^{20}

b) Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3

(Sol: a) $A^{15} = A, A^{20} = I$ **; b)** $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$**)**

108) (Junio-15) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el rango de *A* en función de *t*

b) Calcular *t* para que $\det(A - tI) = 0$

(Sol: a) Si $t \neq 2, t \neq 7$ **rang(A)=3; Si** $t = 2, t = 7$ **rang(A)=2; b) t=7)**

109) (Sept-15) Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} -mx & +my & +z & = & 0 \\ x & -my & +3z & = & 4 \\ 2x & -2y & -z & = & 0 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro m

b) Resolverlo en el caso $m = 0$

c) Resolverlo en el caso $m = 2$

(Sol: a) Si $m \neq 1, m \neq 2$ **SCD; Si** $m = 1$ **SI; Si** $m = 2$ **SCI ; b)** $x = 4$, $y = 4$, $z = 0$**; c)** $\left\{ \left(4\lambda - 4, \frac{7\lambda - 8}{2}, \lambda \right) \middle| \ \lambda \in \Re \right\}$**)**

110) (Sept-15) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

(Sol: a) -30 ; b -12)

111) (Sept-15) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con *A*, es decir que cumplen $AB = BA$

(Sol: $B = \begin{pmatrix} 3b + d & b \\ b & d \end{pmatrix}$**)**